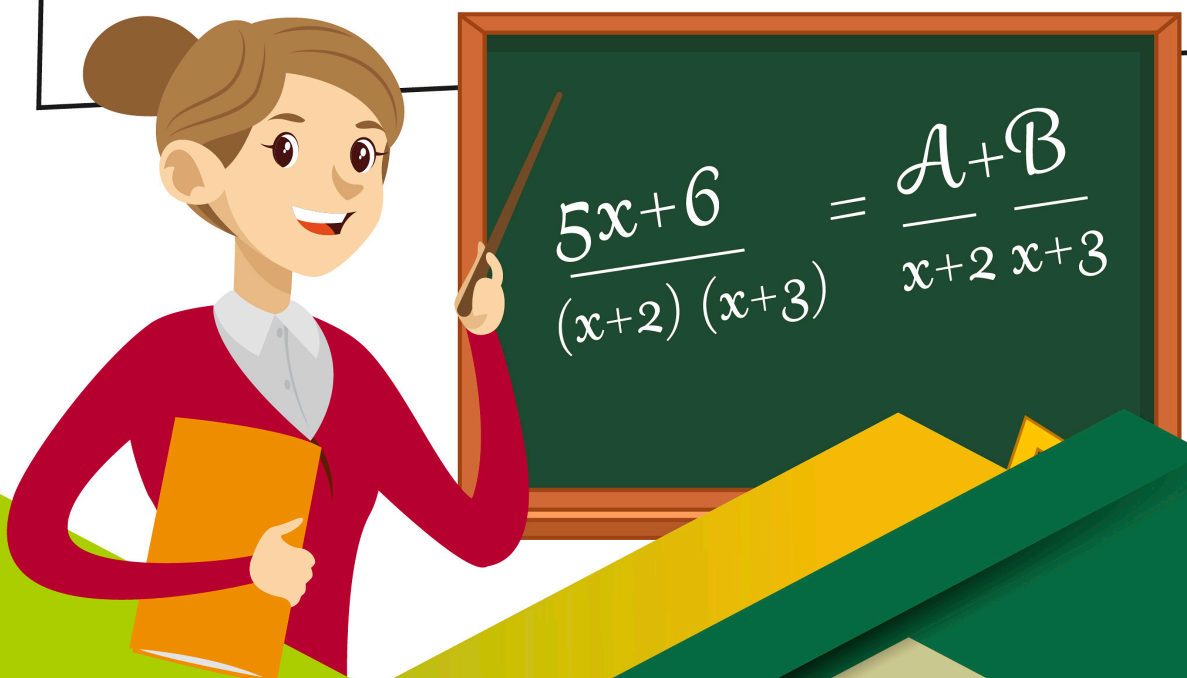
Universidad Técnica Nacional

Integrales por fracciones parciales



Coordinación de Matemática y Estadística ME-003 Cálculo I

Para una mejor visualización del documento se le recomienda descargar el mismo y utilizar alguna herramienta lectora de PDF. Al abrirlo se sugiere visualizarlo en pantalla completa para un mejor uso de la navegación. A continuación se detallan los botones de navegación para facilitar su utilización:

Flechas para avanzar hacia atrás y hacia adelante.

Ir al menú principal

Ir al página de información.

Presentación

Este material tiene como finalidad desarrollar las habilidades y destrezas necesarias para integrar funciones racionales.

Para ello, se plantean una serie de ejercicios, los cuales serán desarrollados paso a paso, resaltando aquellos aspectos importantes para resolver cada uno de ellos.

Es importante recalcar que este tema, es de suma importancia para calcular integrales.

Índice

Presentación 2

Integración por fracciones parciales 4

Fracciones parciales 5

Caso I 6

Ejemplo #1 9

Ejemplo #2 17

Caso II 25

Ejemplo #3 26

Cierre 37

Créditos 38

Integración por Fracciones Parciales

Este método permite integrar algunas de las funciones racionales, que difícilmente se pueden resolver mediante otros métodos de integración.

La integración por fracciones parciales es un método algebraico que permite descomponer una fracción racional en la suma de varias fracciones.

Fracciones Parciales

Dada una función racional de la forma: $\dfrac{N(x)}{D(x)}$

tal que el grado del polinomio del denominador es mayor que el grado del polinomio del numerador y $D(x)$ un polinomio no factorizable en $\mathbb{R}$.

Es posible expresar la fracción anterior como una suma o resta de fracciones más simples cuyo denominador sea un polinomio lineal o un polinomio cuadrático no factorizable en $\mathbb{R}$.

Caso I

Fracciones propias

Factorizar completamente el denominador en factores de los tipos:

$$(px+q)^n \text{ y } (ax^2+bx+c)^m$$

donde ax^2+bx+c es irreductible.

Caso I

Factores lineales

Para factores lineales $(px+q)^n$, la descomposición en fracciones parciales debe incluir la suma siguiente de n fracciones.

$$\frac{A_1}{(px+q)}+\frac{A_2}{(px+q)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(px+q)^n}$$

Caso I

Factores cuadráticos

Para cada factor cuadrático de la forma:

$$(ax^2 + bx + c)^m$$

La descomposición en fracciones parciales debe incluir la suma de las siguientes m fracciones.

$$\frac{B_1x + C_1}{(ax^2 + bx + c)} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_mx + C_m}{(ax^2 + bx + c)^m}$$

Ejemplo #1

Resuelva la integral:

$$\int \frac{3x^2 - 5}{x^3 + 2x} dx$$

Paso 1

Factorizar el denominador

$$\frac{3x^2 - 5}{x^3 + 2x} = \frac{3x^2 - 5}{x(x^2 + 2)}$$

Al factorizar la expresión, se obtienen dos factores distintos, indicando que se debe descomponer la expresión en dos fracciones.

Ejemplo #1

Paso 2

Descomponer la fracción en la suma de dos fracciones simples.

$$\frac{3x^2-5}{x(x^2+2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$$

El denominador de la primera fracción corresponde a un factor lineal, por lo tanto en el numerador se debe colocar un factor de un grado menor, es decir una constante.

El denominador de la segunda fracción corresponde a un factor cuadrático, por lo que en el numerador se debe colocar un factor de un grado menor, es decir, un polinomio de grado 1.

Ejemplo #1

Paso 3

Sumar las fracciones del lado derecho de la igualdad

$$\frac{3x^2-5}{x(x^2+2)}=\frac{A(x^2+2)+(Bx+C)x}{x(x^2+2)}$$

Paso 4

Simplificar la expresión algebraica

$$\frac{3x^2-5}{\cancel{x(x^2+2)}}=\frac{A(x^2+2)+(Bx+C)x}{\cancel{x(x^2+2)}}$$

$$3x^2-5=A(x^2+2)+(Bx+C)x$$

Ejemplo #1

Paso 5

Resolver las operaciones con polinomios

$$3x^2 - 5 = A(x^2 + 2) + (Bx + C)x$$

$$3x^2 - 5 = Ax^2 + 2A + Bx^2 + Cx$$

Paso 6

Agrupar términos semejantes

$$3x^2 - 5 = (A + B)x^2 + Cx + 2A$$

Ejemplo #1

Paso 7

Igualar términos semejantes

$$\boxed{3}x^2+\boxed{0}x\boxed{-5} = \boxed{(A+B)}x^2+\boxed{C}x+\boxed{2A}$$

Para poder igualar términos semejantes, es necesario que el polinomio este ordenado y completo, es decir, es necesario completar las expresiones que están ausentes, con coeficiente 0.

Paso 8

Formar un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A+B=3 \\ C=0 \\ 2A=-5 \end{cases}$$

Ejemplo #1

Paso 9

Resolver el sistema de ecuaciones. Despejando A en la tercera ecuación.

$$A = \frac{-5}{2}$$

Paso 10

Sustituir el valor de A en la primera ecuación y despejar B.

$$\frac{-5}{2} + B = 3$$

$$B = 3 + \frac{5}{2}$$

$$B = \frac{11}{2}$$

Ejemplo #1

Paso 11

Sustituir los valores de $A, B\ y\ C$ en la descomposición de fracciones.

$$\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2}=\frac{\frac{-5}{2}}{x}+\frac{\frac{11}{2}x+0}{x^2+2}$$

Paso 12

Generar la nueva integral

$$\int \frac{3x^2-5}{x^3+2x}dx=\frac{-5}{2}\int \frac{1}{x}dx+\frac{11}{2}\int \frac{1}{x^2+2}dx$$

Ejemplo #1

Paso 13

Resolver la integral, haciendo uso de las tabla de integrales y las propiedades.

$$\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2}=\frac{\frac{-5}{2}}{x}+\frac{\frac{11}{2}x+0}{x^2+2}$$

$$=\frac{-5}{2}\ln|x|+\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,arc\tan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$$

Paso 14

Dar la respuesta

$$\int\frac{3x^2-5}{x^3+2x}dx=\frac{-5}{2}\ln|x|+\frac{11}{2\sqrt{2}}\,arc\tan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$$

Ejemplo #2

Resuelva la integral:

$$\int \frac{4x-7}{(x-2)^2}\,dx$$

Paso 1

Descomponer la expresión en una suma de fracciones simples.

$$\frac{4x-7}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

Ejemplo #2

Paso 2

Sumar las fracciones y simplificar

$$\frac{4x-7}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2}$$

Paso 3

Simplificar la expresión

$$\frac{4x-7}{\cancel{(x-2)^2}} = \frac{A(x-2)+B}{\cancel{(x-2)^2}}$$

$$4x-7 = A(x-2)+B$$

Ejemplo #2

Paso 4

Resolver las operaciones con polinomios

$$4x - 7 = Ax - 2A + B$$

Paso 5

Agrupar términos semejantes

$$4\,x - 7 = A\,x + (-2A + B)$$

Paso 6

Igualar términos semejantes

$$\boxed{4}\;x\;\boxed{-\,7} = \boxed{A}\;x + \boxed{(-2A + B)}$$

Ejemplo #2

Paso 7

Formar el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A = 4 \\ -2A + B = -7 \end{cases}$$

Paso 8

Sustituir el valor de A en la segunda ecuación

$$-2(4) + B = -7$$

Paso 9

Despejar el valor de B

$$-8 + B = -7$$

$$B = -7 + 8$$

$$B = 1$$

Ejemplo #2

Paso 10

Sustituir el valor de A y B en la descomposición de las fracciones simples.

$$\frac{4x-7}{(x-2)^2} = \frac{4}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$$

Paso 11

Generar la nueva integral

$$\int \frac{4x-7}{(x-2)^2}dx = 4\int \frac{1}{x-2}dx - 7\int \frac{1}{(x-2)^2}dx$$

Ejemplo #2

Paso 12

Transformar la expresión de la segunda integral

$$= 4\int \frac{1}{x-2}dx - 7\int (x-2)^{-2}dx$$

Paso 13

Resolver la segunda integral mediante sustitución.

$$\int (x-2)^{-2}dx$$

sea $w = x - 2$

$dw = dx$

Ejemplo #2

Paso 14

Sustituir la variable y generar la nueva integral en la variable w.

$$= \int w^{-2} dw$$

$$= \frac{w^{-1}}{-1} + C$$

$$= -\frac{1}{w} + C$$

$$= \frac{-1}{x-2} + C$$

Ejemplo #2

Paso 15

Resolver la segunda integral mediante sustitución.

$$4\int \frac{1}{x-2}dx - 7\int (x-2)^{-2}dx$$

$$= 4\ln|x-2| + \frac{7}{x-2} + C$$

Paso 16

Dar la respuesta

$$\boxed{\int \frac{4x-7}{(x-2)^2}dx = 4\ln|x-2| + \frac{7}{x-2} + C}$$

Caso II

Fracción impropia

Si la expresión $\frac{N(x)}{D(x)}$ es una fracción impropia, es decir, si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador; se debe dividir el denominador en el numerador para obtener:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

Ejemplo #3

Resuelva la integral:

$$\int \frac{2x^4 - 5x - 7}{x^3 + 2x}\,dx$$

Paso 1

Dividir la expresión algebraica

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{2x^4} + 0x^3 + 0x^2 - 5x - 7 & x^3 + 0x^2 + 2x \\ \cline{2-2}
-\cancel{2x^4} + 0x^3 - 4x^2 & 2x \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad -4x^2 - 5x - 7 &
\end{array}
$$

Ejemplo #3

Paso 2

Dar la nueva integral

$$\int 2x + \frac{-4x^2 - 5x - 7}{x^3 + 2x} dx$$

Paso 3

Separar las integrales

$$\underbrace{\int 2x\, dx}\ + \underbrace{\int \frac{-4x^2 - 5x - 7}{x^3 + 2x} dx}$$

Ejemplo #3

Paso 4

Resolver la primera integral

$$\int 2x\,dx$$

$$= 2\frac{x^2}{2} + C$$

$$= x^2 + C$$

Paso 5

Resolver la segunda integral

$$\int \frac{-4x^2 - 5x - 7}{x^3 + 2x}\,dx$$

Ejemplo #3

Paso 6

Factorizar el denominador

$$\frac{-4x^2-5x-7}{x(x^2+2)}$$

Paso 7

Descomponer la fracción en la suma de dos fracciones simples.

$$\frac{-4x^2-5x-7}{x(x^2+2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$$

Al factorizar la denominador, se obtienen dos factores distintos: uno lineal y otro cuadrático. Al formar las fracciones, el factor lineal lleva una constante en el numerador y el factor cuadrático lleva un polinomio de grado 1 en el numerador.

Ejemplo #3

Paso 8

Sumar fracciones

$$\frac{-4x^2 - 5x - 7}{x(x^2+2)} = \frac{A(x^2+2) - (Bx + C)x}{x(x^2+2)}$$

Paso 9

Simplificar la expresión

$$\frac{-4x^2 - 5x - 7}{\cancel{x(x^2+2)}} = \frac{A(x^2+2) - (Bx + C)x}{\cancel{x(x^2+2)}}$$

$$-4x^2 - 5x - 7 = A(x^2+2) - (Bx + C)x$$

Ejemplo #3

Paso 10

Multiplicar las expresiones

$$-4x^2 - 5x - 7 = Ax^2 + 2A - Bx^2 + Cx$$

Paso 11

Agrupar términos semejantes

$$-4x^2 - 5x - 7 = (Ax^2 - Bx^2) + Cx + 2A$$

Paso 12

Sacar factor común

$$-4x^2 - 5x - 7 = (A - B)x^2 + Cx + 2A$$

Ejemplo #3

Paso 13

Igualar términos semejante

$$\boxed{-4}x^2\boxed{-5}x\boxed{-7}=\boxed{(A-B)}x^2+\boxed{C}x+\boxed{2A}$$

Paso 14

Formar un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A-B=-4 \\ C=-5 \\ 2A=-7 \end{cases}$$

Ejemplo #3

Paso 15

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\boxed{C = -5} \qquad 2A = -7 \qquad A - B = -4$$

$$\boxed{A = \frac{-7}{2}} \qquad \frac{-7}{2} + 4 = B$$

$$\boxed{\frac{1}{2} = B}$$

Paso 16

Sustituir los valores de las constantes

$$\frac{-4x^2 - 5x - 7}{x(x^2+2)} = \frac{\frac{-7}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}x - 5}{x^2+2}$$

Ejemplo #3

Paso 17

Resolver la integral

$$\int \frac{\frac{-7}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}x - 5}{x^2 + 2} dx$$

Paso 18

Separar integrales y sacar constantes

$$\frac{-7}{2} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{x}{x^2 + 2} - 5 \int \frac{1}{x^2 + 2} dx$$

Ejemplo #3

Paso 19

Aplicar propiedades de integrales

$$\frac{-7}{2}\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2} - 5\int \frac{1}{x^2+2}dx$$

Para aplicar la propiedad: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$

La expresión del denominador debe ser el resultado de la derivada del denominador.
En este caso, $(x^2+2)' = 2x$, se debe agregar un 2 en la integral y fuera de la integral un $\frac{1}{2}$.

Paso 20

Aplicar tabla de integrales

$$\frac{-7}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln|x^2+2| - 5\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Ejemplo #3

Paso 21

Sumar el resultado de las integrales

$$x^2+\frac{-7}{2}\ln|x|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln|x^2+2|-5\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$$

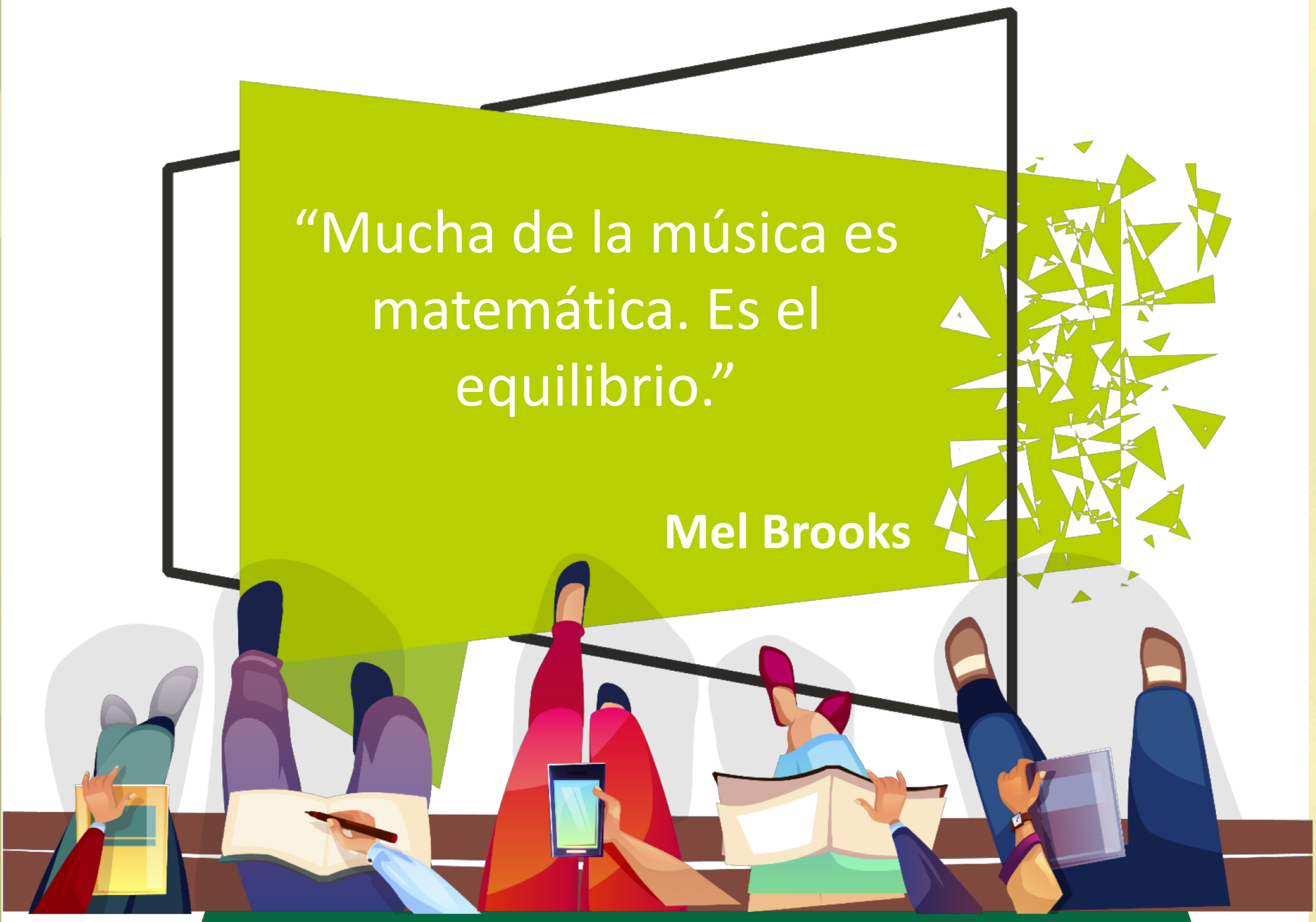
Paso 22

Dar la respuesta

$$\int\frac{2x^4-5x-7}{x^3+2x}dx$$

$$=x^2+\frac{-7}{2}\ln|x|+\frac{1}{4}\ln|x^2+2|-\frac{5}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$$

Espero que estos ejercicios le sean de utilidad para reforzar los conceptos necesarios para calcular integrales mediante fracciones parciales, y de esta manera pueda construir los nuevos conocimientos de Cálculo I.



Créditos

Universidad Técnica Nacional

Coordinación de Matemáticas y Estadística

Contenido

Autor: Evelyn Delgado Carvajal

Producción del recurso didáctico:

Productora académica: Guadalupe Camacho Zúñiga

Diseño Gráfico y multimedia: Karol González Ugalde

Universidad Técnica Nacional

cfpte Centro de Formación Pedagógica y Tecnología Educativa

Tecnología Educativa y Producción de Recursos Didácticos CFPTE - UTN